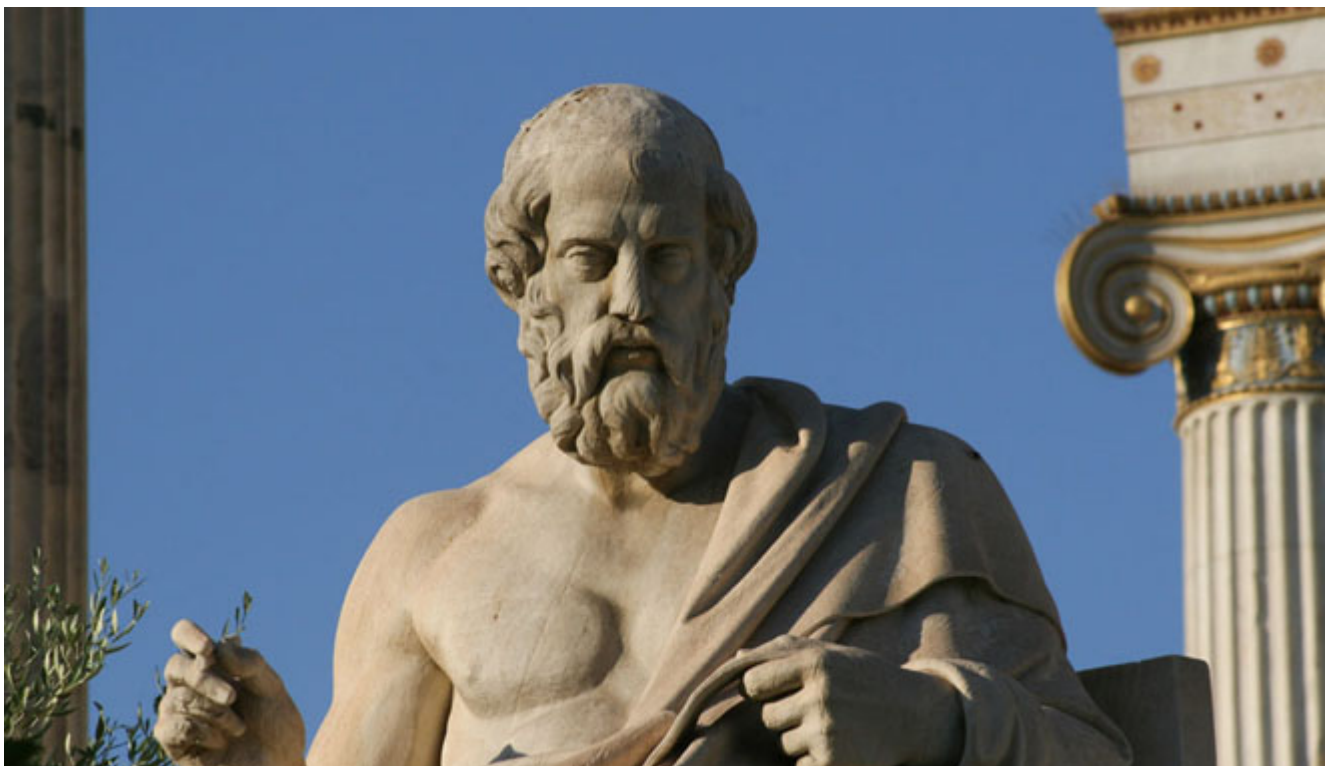
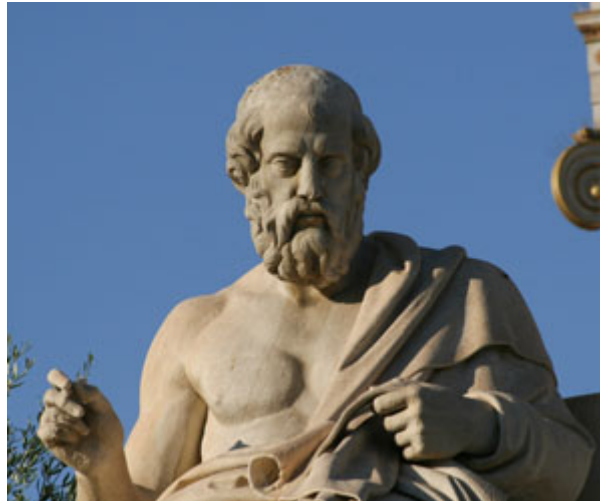


Γεωμετρικός αριθμός: μια άλλη «πλευρά» του Πλάτωνος (Χαράλαμπος Σπυρίδης, Καθηγητής Μουσικής Τμήματος Μουσικών Σπουδών της Φιλοσοφικής Σχολής του Παν/μίου Αθηνών)

/ [Πεμπτουσία· Ορθοδοξία-Πολιτισμός-Επιστήμες](#)



Τέλειον Μείζον Σύστημα κατά χρώμα παρά Πλάτωνι: Θα σας ομιλήσω περί του υπό του Πλάτωνος λεγομένου γεωμετρικού αριθμού. Η ασάφεια της αναφοράς του Πλάτωνος περί του γεωμετρικού αριθμού είναι τοσούτον μεγάλη, ώστε είχαν καταστεί παροιμιώδης για τους αρχαίους. Τούτου του γεγονότος ένεκα υπήρξεν προβληματισμός μήπως παλαιόθεν εγένετο

λαθροχειρία επί του κειμένου.

Το δυστύχημα για την Φιλοσοφίαν είναι ότι εις ουδέν εκ των σωζομένων φιλοσοφικών συγγραμμάτων δεν υπάρχει ίχνος διασαφήνισης περί του συγκεκριμένου προβλήματος.

Όντως, απαιτείται υψίστου βαθμού μύησης, ήτοι βαθύταται γνώσεις Πυθαγορείου Αριθμητικής, Γεωμετρίας και Μουσικής, αι οποίαι εις ολιγόλεπτον ομιλίαν δεν μεταφέρονται. Όμως, εντός του τακτού χρόνου θα παραθέσω την λύσιν του προβλήματος για πρώτην φοράν, το οποίον εν ολίγοις αφορά εις την κατατομήν του κανόνος κατά χρώμα παρά Πλάτωνι ή, όπως λέγομεν εις την Βυζαντινήν Μουσικήν, κατά το χρωματικόν γένος.

Ο Πλούταρχος εις το έργον του *Περί Μουσικής* εκθειάζει τον Πλάτωνα ως εμπειρότατον περί των θεμάτων της αρμονίας (=διαπασών) «ὁ Πλάτων ... ἔμπειρος ἁρμονίας ἦν».

Εκκινούμεν εκ της σεμνής, ουρανίου φύσεως, θείας, καλής και δαιμονίου αρμονίας, το μουσικό διάστημα το οποίον εκθειάζει ο Αριστοτέλης «ὅτι σεμνή ἡ ἁρμονία καὶ θεῖόν τι καὶ μέγα, Ἀριστοτέλης ὁ Πλάτωνος ταυτί λέγει ἡ δέ ἁρμονία ἐστὶν οὐρανία τὴν φύσιν ἔχουσα θεῖαν καὶ καλὴν καὶ δαιμονίαν».

Το διάστημα της αρμονίας (2:1), παρεμβάλλοντες εν πρώτοις εν αὐτῷ δύο μεσότηας, το καθιστώμεν τετραμερές. Αι δύο μεσότητες αὗται είναι η τρίτη και η τετάρτη εκ των δέκα Πυθαγορείων μεσοτήτων, ήτοι η αρμονική ή υπενάντιος και η ενάντιος της υπεναντίου. Συγκεκριμένως, δοθέντων δύο ακεραίων αριθμῶν α και γ ($\alpha > \gamma$), δομούντων την Πλατωνικήν συστοιχίαν ταὐτόν-θάτερον, ήτοι 1:2, κατά την Πυθαγόρειον θεωρίαν περί Μεσοτήτων η αρμονική ή υπενάντιος μεσότης

$$\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{4}{3}$$

προκύπτει εκ του ορισμού της Αρμονικής ή υπεναντίου αναλογίας

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Τοιαύτην αναλογίαν $2, \frac{4}{3}, 1$ δομούν οι ακέραιοι αριθμοί 6, 4, 3.

Η ενάντιος της υπεναντίου μεσότης $\beta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha + \gamma} = \frac{2^2 + 1^2}{2 + 1} = \frac{5}{3}$ προκύπτει εκ του ορισμού της

εναντίου της υπεναντίου αναλογίας

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Τοιαύτην αναλογίαν $2, \frac{5}{3}, 1$ δομούν οι ακέραιοι αριθμοί 6, 5, 3.

Εκ των ορισμών των ανωτέρω αναλογιών τα μέρη των και τα μεγέθη των και αι υπεροχαί των είναι «κατ' ἀριθμόν καί ίσομετρίαν». Τούτο τονίζεται, διότι εις το πρώτον κλάσμα της αναλογίας συμμετέχουν όχι απλοί αριθμοί, αλλά διαφοραί (=μεγέθη) αριθμών.

Επί τῇ βάσει της Πυθαγορείου ρήσεως «ἁρμονία ἐστὶ κρᾶσις καὶ σύνθεσις ἐναντίων» ἐνθα υπονοεῖται ὅτι ἡ ἀρμονία, ἤτοι ἡ διαπασών ἢ ἡ οκτάβα, δομεῖται ὑπὸ της συνθέσεως δύο ἐναντιοτήτων. της ἀρμονικῆς ἢ υπεναντίου και της ἐναντίου της υπεναντίου αναλογιών ἢ αναλογικοτήτων. Την κρᾶσιν και την σύνθεσιν των δύο αναφερθεισών ἐναντιοτήτων την γράφω ως 3, 4, 5, 6.

Ὅμως, οἱ προκύψαντες τέσσερις ἀριθμοὶ δομοῦν και μίαν Αριθμητικὴν αναλογίαν

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma}$$

ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{6 + 3}{2} = \frac{9}{2}$ της οποίας ἐντίθεται ως πέμπτον μέλος μεταξύ των

προαναφερθέντων τεσσάρων ἀριθμῶν 3, 4, $\frac{9}{2}$, 5, 6. Δια διπλασιασμοῦ των ἀριθμῶν της ἐν λόγῳ

πεμπάδος, αὕτη ἐκφράζεται δι' ἀκεραίων και μόνον ἀριθμῶν ως 6, 8, 9, 10, 12.

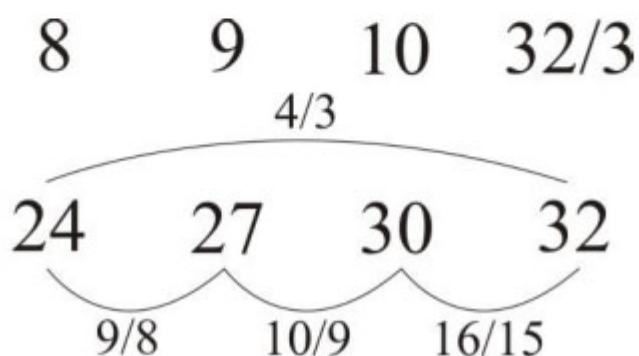
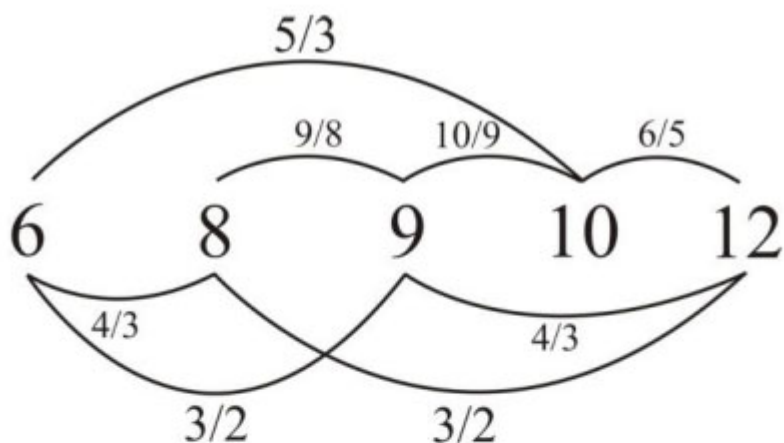
Τοιουτοτρόπως, το διάστημα της αρμονίας (2:1), παρεμβληθεισών των τριών μεσοτήτων, κατέστη πενταμερές 6, 8, 9, 10, 12. Λεπτολογούντες έτι περισσότερο, διαπιστούμεν την ύπαρξιν και πέμπτης αναλογίας, της γεωμετρικής αναλογίας, ήτις εκφράζεται εμπλέγδην κι εναλλάγδην υπό της σχέσεως ($9/6 = 12/8$).

Μεταξύ των διαδοχικών όρων της αριθμητικής αναλογίας 6, 9, 12 σχηματίζονται τα μουσικά διαστήματα του διατονικού γένους διαπέντε ($9/6=3/2$) και διατεσσάρων ($12/9=4/3$), ενώ μεταξύ των διαδοχικών όρων της αρμονικής ή υπεναντίου αναλογίας 6, 8, 12 σχηματίζονται τα μουσικά διαστήματα διατεσσάρων ($8/6=4/3$) και διαπέντε ($12/8=3/2$).

Μεταξύ των διαδοχικών όρων της εναντίου της υπεναντίου αναλογίας 6, 10, 12 σχηματίζονται τα μουσικά διαστήματα του χρωματικού γένους μείζων έκτη χρωματική ($10/6=5/3$) και τρίτη ελάσσων χρωματική ($12/10=6/5$).

Μεταξύ της αρμονικής (8) και αριθμητικής (9) μεσότητος σχηματίζεται το διάστημα του επογδόου τόνου ($9/8$) και μεταξύ αριθμητικής (9) και της εναντίου της υπεναντίου μεσότητος (10) σχηματίζεται ο ελάσσων χρωματικός τόνος ($10/9$).

Ανθυφαιρουμένων των διαστημάτων του διατονικού και του χρωματικού γένους, γεννώνται νέα λίαν ενδιαφέροντα χρωματικά μουσικά διαστήματα, ως είναι φερ' ειπείν το χρωματικόν ημίτονον ($16/15$), δια του οποίου ομού οι δύο προαναφερθέντες τόνοι δομούν τετράχορδον ($9/8 \cdot 10/9 \cdot 16/15 = 4/3$).



Δια δύο τετραχόρδων καθορίζονται τα μέρη της χρωματικής δομής του διαπασών δια ρητών αριθμών ως ακολούθως:

Το ένα τετράχορδον του διαπασών περιχαρακούται μεταξύ των αριθμών 6 και 8, ήτοι της Νήτης και της Παραμέσης.

Το έτερον τετράχορδον του διαπασών περιχαρακούται μεταξύ των αριθμών 12 και 9, ήτοι της Υπάτης και της Μέσης.

Τα προμνημονευθέντα δύο τετράχορδα είναι διεζευγμένα, οπότε μεταξύ των υπάρχει ο επόγδοος τόνος.

Τοιουτοτρόπως, εδομήθη, ως ο Αριστοτέλης μνημονεύει, το διαπασών διάστημα δια των αδρομερών του διαστηματικών στοιχείων, ήτοι δια των δύο τετραχόρδων του και του επογδόου διαζευκτικού τόνου.

[Συνεχίζεται]

⁷ Ο αριθμός 729 αναλυόμενος εις Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα

$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot (2^3)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9 \text{ μας παρέχει ένα πυθαγόρειον τρίτονon } \left(\frac{9}{8}\right)^3 \text{ συν εννέα διαπασών } \left(\frac{2}{1}\right)^9.$$

πυθαγόρειον τρίτονon ήτο το πλέον διάφωνον μουσικόν διάστημα του μουσικού συστήματος, το οποίον εγνώριζεν ο Πλάτων, το άκουσμα του οποίου προεκάλει αίσθημα άσης. Εξακολουθεί και σήμερα το πυθαγόρειον τρίτονon να φέρει τον αυτόν οικτρώς διάφωνον χαρακτήρα (*diabolo in musica*) εις το δυτικόν τονικόν σύστημα 2.500 χρόνια μετά. Αυτό το οποίον ο Πλάτων εξετίμησεν δια του αριθμού 729 ήτο η σχέσις μεταξύ του βασιλέως και του τυράννου και την σχέσιν ταύτην την θεωρεί ως την μεγίστην δυνατήν έντασιν-άσιν εντός ενός πολιτισμένου συστήματος.

Παρατήρηση: το παρόν άρθρο είναι το τέταρτο μέρος της εισήγησης του Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, Καθηγητή του Τμήματος Μουσικών Σπουδών Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών & Κοσμήτορα της Διεθνούς Επιστημονικής Εταιρείας της Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας, με τίτλο “Τέλειον Μείζον Σύστημα κατά χρώμα παρά Πλάτωνι”, στην Επιστημονική Ημερίδα “Φιλοσοφία, Φυσικές Επιστήμες, Βιοηθική”, που διοργανώθηκε από τη Διεθνή Επιστημονική Εταιρεία Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας και την Ένωση Ελλήνων Φυσικών, στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, στις 12/11/2014.

Το τρίτο μέρος της ομιλίας μπορείτε να το διαβάσετε [εδώ](#)